Część drużynowa

Zadanie 1. Liczby siedmiocyfrowe

Z cyfr 1,2,3,4,5,6,7 tworzymy wszystkie możliwe liczby siedmiocyfrowe o różnych cyfrach. Uzasadnij, że nie ma wśród nich dwóch różnych liczb a i b takich, że liczba b jest dzielnikiem liczby a.

Rozwiązanie. Załóżmy, że są takie liczby $a \neq b$, że $a = kb$ i $k \in N, k \geq 2$. Łatwo zauważyć, że $k \leq 7$. Mamy wtedy: $a - b = (k-1)b$. Zauważmy, że liczba $a-b$ dzieli się przez 9. Liczba $k-1$ nie dzieli się przez 9, więc liczba b musi dzielić się przez 9. Suma cyfr liczby b wynosi 28 i nie jest podzielna przez 9 - stąd otrzymujemy sprzeczność.

Zadanie 2. Taniec w kółeczku

Czterdzieścioro dzieci trzymając się za ręce tańczyło w kółku. Wśród nich 22 dzieci trzymało za rękę chłopca, a 30 dzieci trzymało za rękę dziewczynkę. Ile było dziewczynek, a ilu chłopców? Odpowiedź uzasadnij.

Rozwiązanie. $22 + 30 - 40 = 12$ tyle dzieci trzymało za rękę chłopca i dziewczynkę. $30 - 12 = 18$ tyle dzieci trzymało za rękę tylko dziewczynki. Te dzieci trzymały $18 \cdot 2 = 36$ rąk dziewczynek. 12 dzieci trzymało po jednej ręce dziewczynki. Zatem dziewczynki mają $36 + 12 = 48$ rąk. Zatem dziewczynek jest 24, a chłopców – 16.

Zadanie 3. Działanie

W działaniu $10:9:8:7:6:5:4:3:2:1$ wstaw nawiasy tak, aby jego wartość była liczbą naturalną. Jaką najmniejszą wartość naturalną może przyjąć wynik tego działania? Odpowiedź uzasadnij.

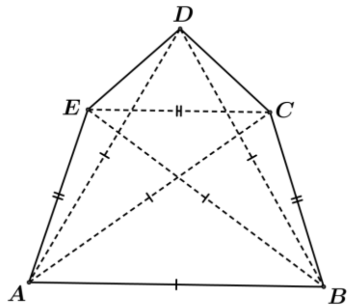
Rozwiązanie Jeśli wynik działania ma być liczbą naturalną to po jego wykonaniu liczba 7 powinna znaleźć się w liczniku ułamka. Zatem całkowita wartość działania nie może być mniejsza od 7. Wartość działania może być równa 7, gdyż:

$$10:9:(8:7:(6:(5:4:(3:2:1)))) = (10 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3):(9 \cdot 8 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 1) = 7$$

Zadanie 4. Pięciokąt

Czy istnieje pięciokąt wypukły, w którym każda przekątna ma długość któregoś z boków pięciokąta? Odpowiedź uzasadnij.

Rozwiązanie: Warunki zadania spełnia pięciokąt przedstawiony na rysunku.

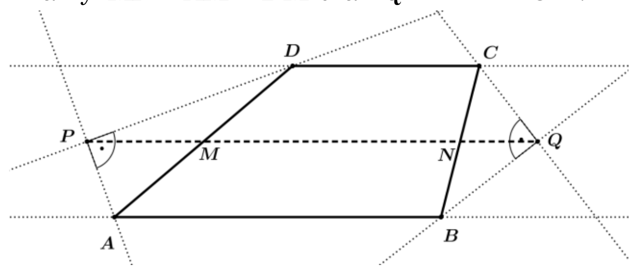


Punkt D jest wierzchołkiem trójkąta równobocznego ABD, natomiast $ABCE$ jest trapezem równoramiennym takim, że $BC = CE = EA$ oraz kąt przy dłuższej podstawie ma miarę 72^o. Przekątne AC i BE są równe bokowi AB, gdyż $\angle BAC = \angle ECA = \angle CAE = 36^o$ oraz $\angle CBA = \angle ACB = 72^o$. Zatem istnieje opisany w zadaniu pięciokąt wypukły. Warto zauważyć, że punkty A, B, C, E są wierzchołkami pięciokąta foremnego.

Zadanie 5. Połowa obwodu trapezu

W trapezie $ABCD$ dwusieczne kątów zewnętrznych przy wierzchołkach A i D przecinają się w punkcie P, zaś kątów zewnętrznych przy wierzchołkach B i C w punkcie Q. Udowodnij, że długość odcinka PQ jest równa połowie obwodu trapezu.

Rozwiązanie: Zauważmy, że $\angle APD = \angle CQB = 90^o$. Niech M i N będą odpowiednio środkami ramion AD i BC. Z własności trójkątów prostokątnych mamy $MP = AM = DM$ oraz $QN = BN = CN$.



Ponadto MN jest linią środkową w trapezie, zatem $MN = \frac{1}{2}(AB + CD)$. Punkty P, M, N, Q .są współliniowe. Stąd $PQ = PM + MN + NQ = \frac{1}{2}AD + \frac{1}{2}(AB + CD) + \frac{1}{2}BC$, co stanowi połowę obwodu trapezu $ABCD$.