Szkice rozwiązań: część drużynowa

Zadanie 1. Para liczb

Czy istnieje para liczby naturalnych x, y spełniająca równanie $x^2 - 3y^2 = 2018$? Odpowiedź uzasadnij.

Rozwiązanie:

Nie istnieje. Liczba x^2 nie może być podzielna przez 3, gdyż 2018 nie jest podzielna przez 3. Liczba x^2 przy dzieleniu przez 3 daje resztę 1, ale 2018 przy dzieleniu przez 3 daje resztę 2.

Zadanie 2. Kąty wielokąta

Udowodnij, że w dowolnym wypukłym wielokącie istnieje nie więcej niż 11 kątów o mierze mniejszej od 150^o.

Rozwiązanie:

Załóżmy coś przeciwnego, że w pewnym n-kącie jest co najmniej 12 kątów o mierze mniejszej od 150^o (pozostałe są mniejsze od 180^o).

Suma kątów n-kąta jest równa $(n-2) \cdot 180^o$.

Zatem: $(n-2) \cdot 180 < 150 \cdot 12 + 180 \cdot (n-12)$, a stąd: $180 \cdot 10 < 150 \cdot 12$, co jest nieprawdą.

Zadanie 3. Pierwiastek z dwóch

Udowodnij, że jeśli dwie liczby naturalne dodatnie a i b spełniają nierówność $\frac{a}{b} < \sqrt{2}$, to także: $\frac{a}{b} + \frac{1}{4ab} < \sqrt{2}$.

Rozwiązanie:

Z założenia wynika, że $2b^2 > a^2$.

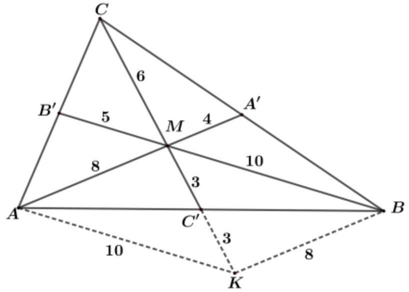
Zatem: $2b^2 \geq a^2 + 1 = a^2 + 2a \cdot \frac{1}{4a} + \frac{1}{2} > a^2 + 2a \cdot \frac{1}{4a} + \frac{1}{16a^2} = \left(a + \frac{1}{4a}\right)^2$, a stąd $2 > \left(\frac{a}{b} + \frac{1}{4ab}\right)^2$, czyli $\sqrt{2} > \frac{a}{b} + \frac{1}{4ab}$.

Zadanie 4. Środkowe trójkąta

Środkowe trójkąta ABC mają długość 9, 12 i 15. Wyznacz pole tego trójkąta.

Rozwiązanie:

Niech M oznacza punkt przecięcia środkowych. Z faktu, że środkowe dzielą się w stosunku 2: 1 można wykonać rysunek, gdzie punkt K wyznaczamy tak, aby czworokąt AKBM był równoległobokiem.



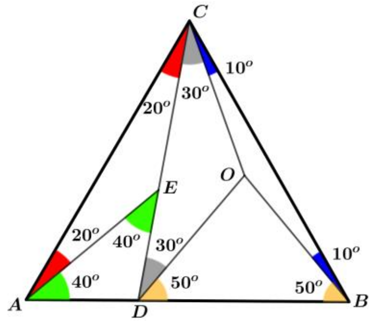
Zauważmy, że trójkąt AKM jest trójkątem prostokątnym o polu 24. Zatem pole trójkąta AC'M jest równe 12. Pole trójkąta ABC jest 6 razy większe od pola trójkąta AC'M i jest równe 72.

Zadanie 5. Sześć trójkątów

Czy można trójkąt równoboczny podzielić na pięć trójkątów równoramiennych, wśród których nie ma trójkątów podobnych? Odpowiedź uzasadnij.

Rozwiązanie:

Istnieje (patrz rysunek).



Na boku AB konstruujemy najpierw punkt D tak, aby $\angle ACD = 20^o$, następnie na odcinku CD punkt E tak, aby $\angle DAE = 40^o$. Trójkąt BCD jest ostrokątny i punkt O jest środkiem okręgu opisanego na tym trójkącie.