Rozwiązania - część indywidualna

Zadanie 1. Bolek i Lolek

Bolek dodaje ułamki (dodatnie) bezbłędnie, natomiast Lolek dodając ułamki w liczniku pisze sumę liczników, a w mianowników sumę mianowników. Nauczyciel poprosił chłopców o dodanie trzech ułamków. Bolek otrzymał prawidłową sumę równą 1. Czy Lolek mógł otrzymać sumę mniejszą od $\frac{1}{100}$? Odpowiedź swoją uzasadnij

Rozwiązanie: Lolek mógł otrzymać sumę mniejszą od $\frac{1}{100}$. Np.

$\frac{49}{99}+\frac{51}{101}+\frac{1}{9999}=1$, oraz $\frac{49+51+1}{99+101+9999}=\frac{101}{10199}<\frac{101}{10100}=\frac{1}{100}$.

Zadanie 2. Równanie

Wyznacz wszystkie liczby całkowite x, y takie, że $4x+(x+1)^2=y^2$.

Rozwiązanie: Zauważmy, że $y^2=(x+3)^2-8$, zatem $(x+3)^2-y^2=8$. Stąd $(x+3+y)(x+3-y)=8$. Czynniki są tej samej parzystości zatem:

$\begin{cases}x+3+y=4\\x+3-y=2\end{cases}\begin{cases}x+3+y=2\\x+3-y=4\end{cases}\begin{cases}x+3+y=-2\\x+3-y=-4\end{cases}\begin{cases}x+3+y=-4\\x+3-y=-2\end{cases}$. Otrzymujemy rozwiązania cztery pary rozwiązań: $(0,1),(0,-1),(-6,1),(-6,-1)$

Zadanie 3. Suma stu liczb.

Wyznacz sto takich liczb, aby ich suma była równa 2015, a ich największy wspólny dzielnik był największy z możliwych..

Rozwiązanie: Niech d oznacza ten dzielnik. Wtedy $d|2015$ oraz $100d\le 2015$. Z drugiej nierówności wynika, że $d\le 20$. Z uwagi na to, iż $2015=5\cdot 13\cdot 31$ otrzymujemy, że $d=13$. Warunki realizuje np. 99 liczb równych 13 i jedna liczba równa 728.

Zadanie 4. Nierówność

Udowodnij, że liczby nieujemne a i b spełniają nierówność

$(1+a)^4(1+b)^4\ge 64ab(a+b)^2$

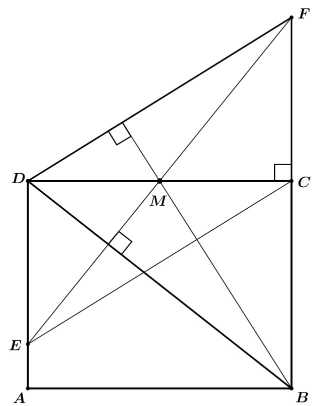
Rozwiązanie: Porównajmy średnią arytmetyczną liczb: $1, ab, \frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}$ z ich średnią geometryczną. Wtedy $\frac{1+ab+\frac{a+b}{2}+\frac{a+b}{2}}{4}\ge\sqrt[4]{1\cdot ab\cdot\frac{a+b}{2}\cdot\frac{a+b}{2}}$.

Mnożąc tę nierówność przez 4 mamy: $1+a+b+ab\ge 2\sqrt{2}\sqrt[4]{a}\sqrt[4]{b}\sqrt{a+b}$.

Podnosząc ostatnią nierówność do czwartej potęgi otrzymujemy $(1+a)^4(1+b)^4\ge 64ab(a+b)^2$.

Zadanie 5. Prostokąt i dwie proste

W prostokącie $ABCD$ punkt M jest środkiem boku CD. Przez punkt C poprowadzono prostą prostopadłą do prostej BM, a przez punkt M prostą prostopadłą do przekątnej BD. Udowodnij, że obie proste przecinają się w punkcie należącym do prostej AD.



Rozwiązanie: Niech punkt E oznacza punkt przecięcia prostej prostopadłej do przekątnej BD przechodzącej przez punkt M z prostą DA. Uzasadnimy, że proste CE i BM są do siebie prostopadłe. Niech F oznacza punkt przecięcia prostej ME z prostą BC.

Rozpatrzmy trójkąt BFD. Wysokości tego trójkąta DC i FE przecinają się w punkcie M. To oznacza, że prosta BM jest prostopadła do boku DF. Czworokąt $DECF$ jest równoległobokiem, zatem prosta BM jest prostopadła również do prostej CE.