Szkice rozwiązań

Zadanie 1. Iloczyn i suma

Iloczyn dwóch liczb dodatnich a i b jest równy 1.
Wiadomo, że $(2a+3b)(2b+3a)=3175$. Oblicz $a+b$.

Rozwiązanie: Odpowiedź: $a+b=23$.
Zauważmy, że $3175=6(a^2+b^2)+13ab=6(a^2+b^2)+13$, a stąd $a^2+b^2=527$. Wówczas $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab=527+2=23^2$, zatem $a+b=23$.

Zadanie 2. Dwa pociągi

Ze stacji A do stacji B wyjechał pociąg pospieszny. W tym samym momencie ze stacji B do A wyruszył pociąg osobowy. Po przejechaniu jednej trzeciej drogi pociąg pospieszny zatrzymał się na 45 minut, następnie ruszył i pociągi minęły się po 20 minutach. Dojechały one do celu w tym samym momencie. W jakim czasie pociąg osobowy pokonał całą trasę? Odpowiedź uzasadnij.

Rozwiązanie: Odpowiedź: 225 minut
Niech t oznacza czas w minutach, po którym pociąg pośpieszny zatrzymał się. Stosunek czasów potrzebnych na przebycie całej drogi przez pociągi musi być równy stosunkowi czasów potrzebnych na przebycie drogi od miasta A do momentu spotkania dla każdego z pociągów (gdyby pociąg pospieszny się nie zatrzymał). Otrzymujemy równanie: $\frac{3t}{3t+45}=\frac{t+20}{2t-20}$, stąd $t=60$ lub $t=-5$. Pociąg osobowy przebył całą trasę w czasie $3t+45$, czyli w czasie 225 minut.

Zadanie 3. Trójkąt równoramienny

Jedenaście wierzchołków 25-kąta foremnego pomalowano czerwonym kolorem. Uzasadnij, że istnieją trzy pomalowane punkty, które są wierzchołkami trójkąta równoramiennego.

Rozwiązanie: Zauważmy, że każda trójka wierzchołków pięciokąta foremnego tworzy trójkąt równoramienny. Niech $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{25}$ będą kolejnymi wierzchołkami 25-kąta foremnego. Wierzchołki te wyznaczają pięć pięciokątów foremnych: $A_1A_6A_{11}A_{16}A_{21}$; $A_2A_7A_{12}A_{17}A_{22}$; $A_3 \dots A_{23}$; $A_4 \dots A_{24}$; $A_5 \dots A_{25}$. Wśród powyższych pięciokątów istnieje jeden, który ma co najmniej trzy wierzchołki, które są wierzchołkami trójkąta równoramiennego.

Zadanie 4. Reszty z dzielenia

Reszta z dzielenia liczby naturalnej n przez 2023 jest o 23 większa niż reszta z dzielenia liczby n przez 2022. Wyznacz najmniejszą liczbę n o tej własności. Odpowiedź uzasadnij.

Rozwiązanie: Odpowiedź: $n=2022\cdot 2000=4044000$
Niech m spełnia warunki zadania. Wtedy istnieją liczby naturalne d_1, d_2, r spełniające warunek $m=2022d_1+r=2023d_2+r+23$. Zatem spełniony jest warunek $m-r=2022d_1=2023d_2+23$, co oznacza, że liczba $m-r$ także spełnia warunki zadania. Szukana liczba jest więc podzielna przez 2022, a przy dzieleniu przez 2023 daje resztę 23. Dla liczb naturalnych $d\leq 2023$ liczba $2022d$ przy dzieleniu przez 2023 daje resztę $2023-d$. Wraz ze wzrostem d reszty zmniejszają się i osiągną wartość 23 dla $d=2000$. Najmniejszą liczbą jest więc liczba $n=2022\cdot 2000=4044000$.

Zadanie 5. Pary liczb naturalnych

Wyznacz wszystkie pary liczb naturalnych (x,y) spełniających równość

$$(x+y)(x+y+1)+y=2023.$$

Rozwiązanie: Odpowiedź: $(1,43)$
Zauważmy, że jeśli $x+y\geq 45$, to lewa strona równości jest niemniejsza niż $45\cdot 46=2070$.
Jeśli $x+y\leq 43$, to $(x+y)(x+y+1)+y\leq 43\cdot 44+43=1935$.
Jeśli $x+y=44$, to $44\cdot 45+y=2023$, zatem $1980+y=2023$, skąd $y=43$ oraz $x=1$.