Szkice rozwiązań - Część drużynowa

Zadanie 1. Sześcian liczby 2019

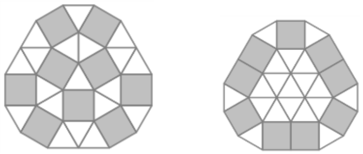
Wyznacz liczbę wszystkich par liczb całkowitych dodatnich będących rozwiązaniem równania $x^2 - y^2 = 2019^3$.

Rozwiązanie: Lemat: Jeśli $p > q$ są liczbami naturalnymi o tej samej parzystości, to układ równań $\begin{cases} x + y = p \\ x - y = q \end{cases}$ ma dokładnie jedno rozwiązanie w liczbach naturalnych.
Układ ten jest oznaczony, rozwiązaniem jest para liczb $x = \frac{1}{2}(p+q)$, , $y = \frac{1}{2}(p-q)$, gdzie $p+q$ i $p-q$ są liczbami parzystymi.
Równanie $x^2 - y^2 = 2019^3$ ma tyle rozwiązań, ile jest par liczb naturalnych (p,q) takich, że $p > q$ oraz $pq = 2019^3$, gdzie p, q są liczbami nieparzystymi zatem $p+q$ i $p-q$ są liczbami parzystymi. $2019 = 3 \cdot 673$ jest rozkładem liczby na czynnik pierwsze, zatem $2019^3 = 3^3 \cdot 673^3$ jest także rozkładem na czynniki pierwsze. Liczba 2019^3 ma zatem dokładnie $4 \cdot 4 = 16$ dzielników, czyli 8 par dzielników spełniających warunki zadania tzn. jeśli d jest dzielnikiem liczby 2019^3 i $d > \frac{2019^3}{d}$ to biorąc za $p = d$ i $q = \frac{2019^3}{d}$ otrzymujemy 8 par rozwiązań $x = \frac{1}{2}(p+q)$, $y = \frac{1}{2}(p-q)$.

Zadanie 3. Trójkąty i kwadraty

Stefan z 9 kwadratów o boku 1cm i 19 trójkątów równobocznych o boku 1 cm ułożył wielokąt. Czy obwód tego wielokąta może być równy 15 cm, jeśli figur nie można nakładać na siebie? Odpowiedź uzasadnij.

Rozwiązanie: Można, np.:



Zadanie 3. Suma sum

Oblicz

$$\left(\frac{1+2}{3} + \frac{4+5}{6} + \frac{7+8}{9} + \cdots + \frac{2017+2018}{2019}\right) + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{673}\right)$$

Rozwiązanie: Pierwsza suma jest równa:

$$\frac{1+2}{3} + \frac{4+5}{6} + \frac{7+8}{9} + \cdots + \frac{2017+2018}{2019} =$$
$$= \frac{2\cdot 3 - 3}{3} + \frac{2\cdot 6 - 3}{6} + \frac{2\cdot 9 - 3}{9} + \cdots + \frac{2\cdot 2019 - 3}{2019} =$$
$$\left(2 - \frac{3}{3}\right) + \left(2 - \frac{3}{6}\right) + \left(2 - \frac{3}{9}\right) + \cdots + \left(2 - \frac{3}{2019}\right) = (2 + 2 + 2 + \cdots + 2) -$$
$$-\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{673}\right).$$

Zatem suma sum jest równa: $2 \cdot 673 = 1346$.

Zadanie 4. Układ równań

Rozwiąż układ równań:

$$\begin{cases} ab + a + b = 1 \\ bc + b + c = 5 \\ ca + c + a = 5 \end{cases}$$

Rozwiązanie: Dodajmy 1 do obu stron wszystkich równań. Otrzymamy:

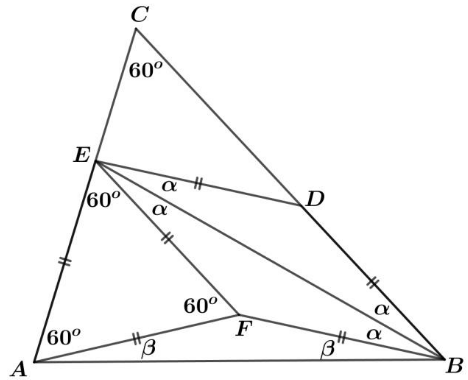
$$\begin{cases} (a+1)(b+1) = 2 \quad (1) \\ (b+1)(c+1) = 6 \quad (2) \\ (c+1)(a+1) = 6 \quad (3) \end{cases}$$

Dzieląc (2):(3) otrzymujemy $a + 1 = b + 1$. Na podstawie (1) otrzymujemy: $(a+1)^2 = 2$, stąd $a = b = \sqrt{2} - 1$ lub $a = b = -\sqrt{2} - 1$. Wykorzystują równość $c + 1 = \frac{6}{a+1}$ ostatecznie otrzymujemy: $a = b = \sqrt{2} - 1$, $c = -1 + 3\sqrt{2}$ lub $a = b = -\sqrt{2} - 1$, $c = -1 - 3\sqrt{2}$.

Zadanie 5. Trójkąt

Dany jest trójkąt ABC, w którym $\angle ACB = 60^o$. Na bokach BC i AC leżą odpowiednio punkty D i E. Ponadto $|BD| = |DE| = |EA|$. Udowodnij, że $\angle ABE = 30^o$.

Rozwiązanie



Wybierzmy punkt F tak, aby $FBDE$ był równoległobokiem, a więc z warunków zadania rombem. Trójkąt AFE jest równoramienny ($|AE| = |EF|$) oraz $\angle AEF = 60^o$, zatem jest trójkątem więc równobocznym. Obliczamy sumę kątów przy punkcie F: $60^o + (180^o - 2\beta) + (180^o - 2\alpha) = 360^o$. Stąd $2\alpha + 2\beta = 60^o$, zatem $\angle ABE = \alpha + \beta = 30^o$.