Szkice rozwiązań zadań (finał 2024)

Zadanie 1. Bolek i Lolek

Dane są trzy liczby dodatnie a, b, c. Bolek na tablicy zapisał liczby: $\frac{1}{a} + bc$, $\frac{1}{b} + ac$, $\frac{1}{c} + ab$, natomiast Lolek liczby: $2a^2, 2b^2, 2c^2$. Okazało się, że obaj chłopcy napisali te same liczby, niekoniecznie w tej samej kolejności. Oblicz iloczyn abc.

Rozwiązanie

Iloczyn liczb zapisanych przez Bolka wynosi: $\frac{(abc+1)^3}{abc}$, a iloczyn liczb Lolka wynosi $8(abc)^2$. Iloczyny te są równe. Zatem $8(abc)^3 = (abc+1)^3$, a stąd $2abc = abc + 1$, czyli $abc = 1$.

Zadanie 2. Trzy równania kwadratowe

Niech a, b, c będą różnymi liczbami rzeczywistymi oraz niech $c \neq 0$. Udowodnij, że jeśli równania $x^2 + ax + bc = 0$, $x^2 + bx + ac = 0$ mają wspólny pierwiastek, to pozostałe pierwiastki tych równań spełniają równanie $x^2 + cx + ab = 0$.

Rozwiązanie

Niech p będzie tym wspólnym pierwiastkiem. Wtedy: $p^2 + ap + bc = 0$ i $p^2 + bp + ac = 0$. Odejmując równania stronami otrzymujemy równość $(a-b)p + c(b-a) = 0$, z której wynika, że $p = c$ $(p \neq 0)$, gdyż $b \neq a$. Ze wzorów Viete'a rozwiązaniami pierwszego równania są liczby b i c, zaś drugiego a i c. Wykorzystując ponownie wzory Viete'a mamy: $b + c = -a$ oraz $a + c = -b$, z których otrzymujemy równość $c = -(a+b)$. Zatem liczby a i b są pierwiastkami równania $x^2 + cx + ab = 0$.

Zadanie 3. Suma kolejnych liczb

Czy liczbę 2048 można przedstawić w postaci sumy przynajmniej dwóch kolejnych liczb naturalnych? Odpowiedź uzasadnij.

Rozwiązanie

Niech $n, k \in \mathbb{N}$ oraz $k \geq 2$.
Załóżmy, że $n + (n+1) + (n+2) + \ldots + (n+k-1) = 2048$.
Ze wzoru na sumę ciągu arytmetycznego mamy $\frac{(2n+k-1)k}{2} = 2048$, czyli $(2n+k-1) \cdot k = 2^{12}$. Wynika stąd, że liczby $(2n+k-1)$ oraz k są parzyste, co jest niemożliwe. Ostatecznie liczby 2048 nie można zapisać w postaci sumy kolejnych liczb naturalnych.

Zadanie 4. Dwie nierówności

Trzy liczby p, q, r spełniają warunek $(p+q+r)r < 0$. Udowodnij, że $q^2 > 4pr$.

Rozwiązanie

Rozpatrzmy funkcję kwadratową $f(x) = x^2 + qx + pr$. Zauważmy, że:

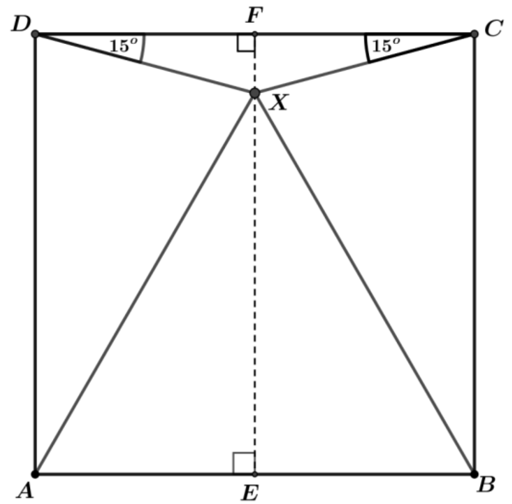
$$f(r) = r^2 + qr + pr = (p+q+r)r < 0.$$

Współczynnik przy x^2 jest dodatni, zatem wyróżnik trójmianu kwadratowego $\Delta = q^2 - 4pr$ musi być dodatni, a stąd wynika teza zadania $q^2 > 4pr$.

Zadanie 5. Trójkąt równoboczny w kwadracie

Wewnątrz kwadratu $ABCD$ znajduje się taki punkt X, że miary kątów $\sphericalangle XDC$ i $\sphericalangle DCX$ wynoszą 15°. Udowodnij, że trójkąt ABX jest trójkątem równobocznym.

Rozwiązanie



Przyjmując, że bok kwadratu ma długość a oraz korzystając z faktów, że trójkąt XCD jest równoramienny i $\text{tg}15^\circ = 2 - \sqrt{3}$, otrzymujemy $|FX| = \left(2 - \sqrt{3}\right)\frac{a}{2}$.

Zatem $|EX| = |FE| - |FX| = a - \left(2 - \sqrt{3}\right)\frac{a}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Trójkąt ABX jest trójkątem równoramiennym, w którym $\text{tg}(\sphericalangle BAX) = \sqrt{3}$, czyli $|\sphericalangle BAX| = 60°$. Zatem trójkąt ABX jest trójkątem równobocznym.