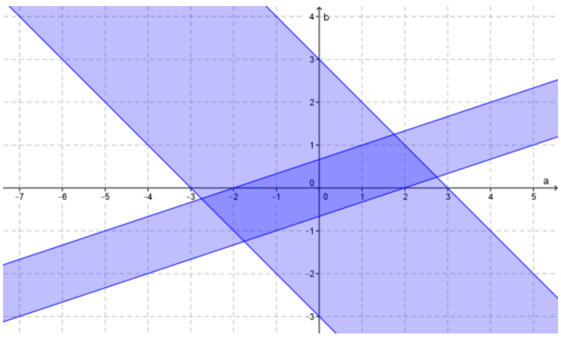
Szkice rozwiązań CZĘŚĆ INDYWIDUALNA

1. Ułamki. Oblicz, ile jest nieskracalnych ułamków, które są mniejsze od $\frac{1}{20\cdot 16}$, większe od $\frac{1}{20\cdot 17}$ oraz których licznik jest równy $20\cdot 16$.

Rozwiązanie: Nierówności: $\frac{1}{20\cdot 17} < \frac{20\cdot 16}{m} < \frac{1}{20\cdot 16}$ są równoważne nierównościom $(20\cdot 16)^2 < m < 20^2\cdot 16\cdot 17 = (20\cdot 16)^2 + 6400$. Mamy: $m = (20\cdot 16)^2 + k$, gdzie $0 < k < 6400$ i k jest względnie pierwsze z $(20\cdot 16)^2$ tzn. nie dzieli się ani przez 2 ani przez 5. Liczb podzielnych przez 5 z tego zakresu jest $\frac{6400}{5} - 1 = 1279$, podzielnych przez 2 jest $\frac{6400}{2} - 1 = 3199$, natomiast liczb podzielnych przez 10 mamy: $\frac{6400}{10} - 1 = 639$. Stąd liczb niepodzielnych ani przez 2, ani przez 5 mamy: $6399 - 1729 - 3199 + 639 = 2560$.

2. Układ nierówności Wyznacz największą liczbę całkowitą a, dla której istnieje liczba całkowita b spełniająca układ nierówności: $\begin{cases} |a+b| \le 3 \\ |a-3b| \le 2 \end{cases}$.

Rozwiązanie: Niech a, b spełniają ten układ nierówności. Zauważmy, że: $4a = 3(a+b) + (a-3b)$. Stąd: $|4a| \le 3|a+b| + |a-3b| \le 11$. Zatem $|a| \le \frac{11}{4}$. Z uwagi na to, że a ma być największą liczbą całkowitą spełniającą układ nierówności otrzymujemy $a = 2$, a układ przyjmuje postać $\begin{cases} |2+b| \le 3 \\ |2-3b| \le 2 \end{cases}$ i spełnia go $b = 0$ lub $b = 1$.

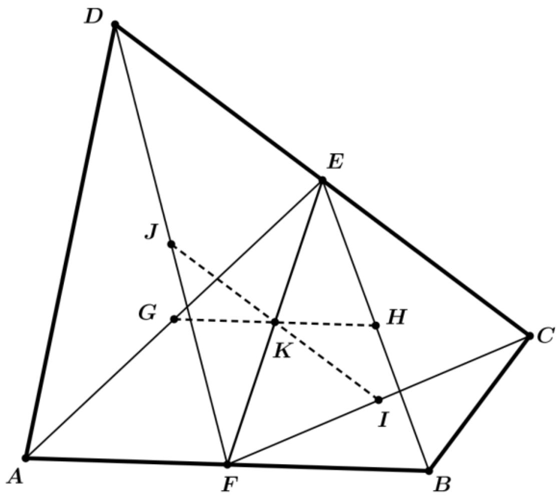


3. Trzy kwadraty. Udowodnij, że nie istnieje taka liczba pierwsza p oraz liczba całkowita dodatnia x taka, że liczby $x, x+p, x+2p-1$ są kwadratami liczb naturalnych.

Rozwiązanie: Dowód przez sprzeczność: Niech $x = a^2$ oraz $a^2 + p = b^2$, gdzie liczby $a, b \in N$. Stąd $p = (b-a)(b+a)$. Ponieważ p jest liczbą pierwszą otrzymujemy, że $b = a+1$ oraz $p = b + a = 2a + 1$, oraz $x + 2p - 1 = a^2 + 4a + 1$. Liczba $a^2 + 4a + 1$ znajduje się pomiędzy kwadratami kolejnych liczby naturalnych $(a+1)^2$ i $(a+2)^2$, a zatem sama nie może być kwadratem liczby naturalnej. Stąd mamy sprzeczność.

4. Równoległobok. W czworokącie wypukłym $ABCD$ punkty E i F są odpowiednio środkami boków CD i AB, natomiast punkty G,H,I,J są odpowiednio środkami odcinków AE, BE, CF i DF. Udowodnij, że punkty G,H,I,J są wierzchołkami równoległoboku albo leżą na jednej prostej.

Rozwiązanie: (patrz rysunek)



Niech K będzie środkiem odcinka EF. Trójkąty IJF i CDF są podobne w skali $1:2$. FE jest środkową trójkąta CDF, więc FK jest środkową trójkąta IJF, a stąd $|IK|=|KJ|$ oraz K leży na odcinku IJ. Analogicznie, z podobieństwa trójkątów GHE i ABE mamy, że $|GK|=|KH|$ oraz K leży na GH. Odcinki IJ oraz GH dzielą się na połowy, zatem $GIHJ$ jest równoległobokiem. Gdy czworokąt wypukły $ABCD$ jest trapezem o podstawach AB i CD punkty G,H,I,J leżą na jednej prostej.

5. Dziesięć kolejnych liczb. Czy istnieje dziesięć kolejnych liczb naturalnych, które można podzielić na dwa niepuste podzbiory tak, aby suma najmniejszych wspólnych wielokrotności liczb każdego z podzbiorów kończyła się liczbą 2016? Odpowiedź uzasadnij.

Rozwiązanie: Nie istnieje. Zauważmy, że liczba kończąca się cyframi 2016 jest podzielna 16. Załóżmy, że można to zrobić: tzn. rozbić zbiór kolejnych 10 liczb naturalnych na dwa niepuste podzbiory A i B takie, że $NWW(A)+NWW(B)$ jest podzielne przez 16. Wśród kolejnych 10 liczb naturalnych jedna lub dwie liczby są podzielne przez 8.

(i) Jeśli jest tylko jedna taka liczba, to jedna z liczb $NWW(A)$, $NWW(B)$ jest podzielna przez 8, a druga nie. Zatem ich suma nie jest podzielna przez 8.

(ii) Jeśli wśród nich są dwie liczby podzielne przez 8, to są to dwie kolejne liczby podzielne przez 8, a zatem jedna z nich jest podzielna przez 16, a druga nie. Jeśli obie liczby znajdą się w tym samym podzbiorze np. A to $NWW(A)$ będzie podzielne przez 16, a $NWW(B)$ nie będzie podzielne przez 16. Jeśli te dwie liczby znajdą się w różnych podzbiorach, to jedna z NWW będzie podzielna przez 16, a drugie NWW będzie podzielne tylko przez 8, a nie przez 16. Zatem ich suma nie będzie podzielna przez 16.